



TITLE:

3次元多様体上のリーマン計量の変形(Theory of Spines of 3-manifolds)

AUTHOR(S):

河野, 正晴

CITATION:

河野, 正晴. 3次元多様体上のリーマン計量の変形(Theory of Spines of 3-manifolds). 数理解析研究所講究録 1985, 563: 1-41

ISSUE DATE:

1985-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/99072>

RIGHT:

3次元多様体上のリーマン計量の変形

神戸大教養 河野正晴 (KOUNO Masaharu)

① Hamilton は [1] において「正 α Ricci 曲率をもつ 3次元多様体は正 α 定曲率空間になる。」ということを示しました。講演ではそのことに関連して、Ricci 曲率が非負で、0 になるところが local にある時、ある条件を仮定して、上と同様のことが言えるという話をしました。しかし、その後条件なしに、もっと一般的な形でそれがいえそうなことに気がついたのでそれについて書きます。

② ここでは Hamilton の結果の簡単な解説をします。M を 3次元多様体とし、M 上の Riemannian metric g_{ij} を 1 つ固定します。その時 g_{ij} に依存して、curvature tensor, Ricci curvature tensor, scalar curvature の 3 種の曲率が定まることは知られています。念のため定義を書いておく以下のようなものです。 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ (行列として)、クリストフェルのシンボルを

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right)$$

とします。(x_i は local coordinate であ)

(1) curvature tensor

$$R_{j|k}^h = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^h - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{ik}^h + \Gamma_{ip}^h \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{jp}^h \Gamma_{ik}^p$$

Σ は index を下げて書く

$$R_{ijkl} = g_{hk} R_{ijl}^h$$

(2) Ricci curvature

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}$$

(3) scalar curvature

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

定義を見るとわかる様に(1)が一番情報を多く含んでいて、(1)がわかれば(2)がわかり、そして(3)がわかるという様になっています。 Hamiltonの結果をもう一度書いておきます。

Theorem

M を閉じた 3次元多様体とする。 M 上に g_{ij} からきまる Ricci curvature がいたるところ正である g_{ij} が存在したとすると、別の Riemannian metric \tilde{g}_{ij} が存在し \tilde{g}_{ij} は定曲率。ここで \tilde{g}_{ij} が定曲率とは、 \tilde{g}_{ij} からきまる \tilde{R}_{ijkl} に対し $\tilde{R}_{ijkl} = K(\delta_{ik} \tilde{g}_{jl} - \delta_{il} \tilde{g}_{jk})$ となる K が存在することとし置く。

この定理はある状況では(2)から(1)が求まるということ
を言っています。Hamilton の証明のアイディアは以下
の様なものです。 $\mu(x) = \sqrt{\det(g_{ij})}$ $d\mu = \mu(x) dx$.

$$r = \frac{\int R d\mu}{\int d\mu} \quad \text{とします。}$$

この時、与えられた正の Ricci curvature をもつ Riemannian
metric g_{ij}^0 を初期値とする次の発展方程式を考えます。

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t) = \frac{2}{3} r(t) g_{ij}(t) - 2 R_{ij}(t)$$

$R_{ij}(t)$ は $g_{ij}(t)$ から定まる Ricci curvature で $r(t)$ も
同様。この時この方程式(*)は local な解をもち、少し変
形すると $0 \leq t < \infty$ で解をもち $g_{ij}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} g_{ij}(t)$ が
求まるものになる。

②正の定曲率空間になれば、それは Wolf [2] により完全に
分類されています。例えば $\pi_1(M) = 1$ なら $M \cong S^3$ となるの
けです。そこで $\pi_1(M) = 1$ という条件のもとで、ある
metric g_{ij}^0 から Ricci curvature が正になる様な metric
 g_{ij} をつくり出せば、Poincaré Conjecture は解けるわけ
ですが、これはどこから手をつけてよいが全くわからない難
問です。そこでいくつかの中間的な考察を行なったわけ
ですが、見るべき成果がなく、結局講演で述べた形のものを得

ただけでした。その後ごちゃごちゃした条件をはぶけるのではないか(証明は完全ではないですが)と身がついたので、それを書きます。

③次のことが成立すると思います。

Fact Hamiltonの定理は compact な (boundary があってもよい) 3次元多様体についても成立する。

原稿しゅきりまでに証明を完全にしようと思いましたが、まだ少し gap があるようです。(正しいということはほとんど確信しているのですが) 証明は Hamilton と同様に方程式 $(*)$ を考えます。local な解があることは同様にわかります。次に少し方程式の形を変形しながら $\gamma(t)$ を統制してやるのですが、そこで若干 gap が残っています。以下では Fact が成立すると仮定します。その時講演で述べたことは次の様に条件をおとして述べられます。

Proposition

M は compact な 3次元多様体とする。 M 上に Riemannian metric で Ricci curvature が非負に定まるものが存在する。更にゼロに定まる所は local (3-ball をなかに含む)。
この時 M は定曲率。

References

- [1] Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Diff. Geom. 17(1982) 255 - 306
- [2] Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill, New York, 1967

Reduction Theorem of finite Abelian actions on compact 2-manifolds

上智大理工 横山和夫 (Kazuo Yokoyama)

compact connected な 2次元多様体 M 上の periodic map f (\mathbb{Z}_n -action) に対して 1次元 singular set $\mathcal{S}^1(f)$ を除去することによって 前に periodic map の分類を完成させた (詳細は [9] を参照)。ここでは compact connected な 2次元多様体 M 上の finite Abelian action に対しても同様に 1次元 singular set を除去して 1次元 singular set がない (あるとしても孤立点のみが singular set である) finite Abelian action の分類問題に reduction できることを示す。 (例えば "orientable で orientation preserving な finite Abelian action の分類は [1] でやられているので" reduction した結果がこうなる場合には分類は完成する)。

以下 ことわらない限り 2次元多様体 といえは compact で connected であるとする。 (<記号の注意> [9] では singular set を \mathcal{S} で表わしたがここでは S を使う)

§1 finite Abelian action とその基本性質

定義 1.1 G ; 有限ア-ベル群 M ; (2次元)多様体 において 次の条件 (0) ~ (2) を満たす写像 $\psi: G \times M \rightarrow M$ のことを finite Abelian action (on M) といい, G と M を明記したい時は $\psi(G, M)$ と表わす。

(0) $\forall g \in G$ に対して $\psi_g(x) = \psi(g, x)$ で定まる写像 $\psi_g: M \rightarrow M$ は M 上の同相写像である。

(1) $\psi_e(x) = x$ (e ; G の単位元)

(2) $\psi(g'g, x) = \psi(g', \psi_g(x))$ ($\forall g, g' \in G$)

そして ψ の元全体の集合を $\mathcal{O}(G, M)$ と表わす。さらに $\mathcal{O}(G) = \bigcup \{ \mathcal{O}(G, M) ; M; 2\text{次元多様体} \}$, $\mathcal{O} = \bigcup \{ \mathcal{O}(G) ; G; \text{有限ア-ベル群} \}$ と表わす。

定義 1.2 ① $\psi \in \mathcal{O}(G, M)$ が effective とは $\{ g \in G \mid \psi_g(x) = x \ \forall x \in M \} = \{ e \}$ を満たすときをいう。

② $I_x = \{ g \in G \mid \psi_g(x) = x \}$ を $x (x \in M)$ の isotropy group といい。

③ $\psi \in \mathcal{O}(G, M)$ が free とは $\forall x \in M$ に対して $I_x = \{ e \}$ を満たすときをいう。

今後我々は finite Abelian action において 常に

effective なもののみに考えるので、特にことわらない限り effective は省略して 単に finite Abelian action という。

定義 1.3 2つの (finite Abelian) action $\psi, \tilde{\psi} \in \mathcal{O}(G)$ が congruent (equivalent) とは 次の図式が可換となる M から \tilde{M} の上への同相写像 h が存在するときをいう。

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\psi} & M \\ \downarrow \text{id} \times \downarrow h & & \downarrow h \\ G \times \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{M} \end{array}$$

$$(\text{但し } \text{id}(g) = g \quad (g \in G))$$

次に我々は M の境界上の部分集合を setwise に保つ action を次のように定めよう。

S_i^* は M の境界 ∂M 上のいくつかの arc, loop からなる集合で $S_i^* \cap S_j^* \ (i \neq j)$ は 空か いくつかの点で交わるものとし, $S^* = (S_1^*, S_2^*, \dots, S_p^*) \ (p \geq 0)$ とおく。このとき

定義 1.4 G ; 有限アベル群 に対して 次の条件 (a) (3) をみたす写像 $\psi: G \times M \longrightarrow M$ のことを我々は finite Abelian s-action (on M) といい G, M, S^* を明記しない時は $\psi(G, M, S^*)$ と表わす。

(a) ψ は finite Abelian action

$$(3) \quad \psi(S_i^*) = S_i^* \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

として上の元全体の集合を $\mathcal{O}_s(G, M, S^*)$ と書き、さらに $\mathcal{O}_s(G) = \bigcup \{ \mathcal{O}_s(G, M, S^*) ; M; 2\text{-次元多様体}, S^*; \text{上の条件を満たす} M \text{上の部分集合} \}$, $\mathcal{O}_s = \bigcup \{ \mathcal{O}_s(G) ; G; \text{有限アベル群} \}$ と書く。

【注】 ① effective, isotropy group, free はいつもの action の時と同様に定義される。

② $p=0$ (S^* がないとき) なら $\mathcal{O}(G, M) = \mathcal{O}_s(G, M, S^*)$, $\mathcal{O}(G) \subseteq \mathcal{O}_s(G)$, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_s$ である。よっていつもの finite Abelian action は $p=0$ なる finite Abelian s -action と考えられる。

次に s -action のときにも congruent (equivalent) も次のように定める。

定義 1.5 2つの (finite Abelian) s -action $\psi(G, M, S^*)$, $\tilde{\psi}(\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{S}^*)$ ($\in \mathcal{O}_s$) が s -congruent (s -equivalent) とは (A) $G = \tilde{G}$ であり (B) 次の条件を満たす M から \tilde{M} への同相写像 $h: M \rightarrow \tilde{M}$ が存在するときをいう。

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\psi} & M \\ \downarrow \text{id} \times \downarrow h & & \downarrow h \\ G \times \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{M} \end{array} \quad \text{が可換}$$

$$(2) \quad \underbrace{p = \tilde{p} \circ z}_{h(S_i^*)} = \tilde{S}_i^* \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

$$\text{但し } S^* = (S_1^*, S_2^*, \dots, S_p^*) \quad , \quad \tilde{S}^* = (\tilde{S}_1^*, \tilde{S}_2^*, \dots, \tilde{S}_p^*)$$

次に finite Abelian s -action $\psi(G, M, S^*)$ に対して
singular set を次のように定める

定義 1.6 $S(\psi) = \{x \in M \mid I_x \neq \{e\}\}$ を ψ の
singular set という。

その時 $\psi(G, M, S^*)$ に対して, M の点に次のよう
に同値関係を定め, 商集合 M/\sim を M/ψ と表す。

• $x, y \in M$ に対して $x \sim y$ とは $\exists g \in G$; $\psi_g(x) = y$
すると [3] によって

Prop. 1.1 orbit space $X = M/\psi$ もまた (compact
connected) 2次元多様体である。

よって自然な projection (quotient map) $p: M \longrightarrow X$
は branched set として $p(S(\psi))$ をもつ finite Abelian
branched covering になる。また [3] によって

Prop. 1.2 $p(S(\psi))$ は 次の $<0>$ か $<1>$ である。

$<0>$ X の内部 $\overset{\circ}{X}$ の孤立点

$<1>$ X の境界 ∂X 上の arc か loop

そこで $S(\psi)$ を p による像によって次のように2つの
集合に分ける。

定義 1.7 finite Abelian s -action ψ に対して

(0) $S^0(\psi) = \{ x \in S(\psi) \mid p(x) \text{ は孤立点 (すなわち } \langle 0 \rangle \text{ の type)} \}$ を 0 次元 singular set という。

(1) $S^1(\psi) = \{ x \in S(\psi) \mid p(x) \text{ は } \langle 1 \rangle \text{ の type} \} = S(\psi) - S^0(\psi)$ を 1 次元 singular set という。

次に我々は有限アベル群 G を次のように直和分解する。
(\mathbb{Z}_n は位数 n の巡回群を表す)

$$\underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{e_0} \oplus \mathbb{Z}_{2^{e_1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{e_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{2^{e_s}} \oplus G'$$

(但し $e_s \geq e_{s-1} \geq \cdots \geq e_2 \geq e_1 \geq 2$, G' は位数が奇数の元からなる (もちろん単位元 e は含む) G の部分群)

さらに x_i を i 番目の \mathbb{Z}_2 の生成元 ($1 \leq i \leq e_0$), y_j を $\mathbb{Z}_{2^{e_j}}$ ($1 \leq j \leq s$) の生成元とする。このとき, $\{x_1, x_2, \dots, x_{e_0}, y_1, y_2, \dots, y_s\}$ は G/G' の生成系となして(13)。今後これらは固定しておく。

定義 1.8 G の部分群 H に対して

$$S_H(\psi) = \{ x \in M \mid \psi_h(x) = x \quad \forall h \in H \}.$$

② G の部分集合 A に対して

$S_A(\psi) = S_{\langle A \rangle}(\psi)$. 但し $\langle A \rangle$ は A によって生成される G の部分群を表す。

$$\textcircled{3} \quad G \text{ の元 } g \text{ に対して } S_g(\psi) = S_{\langle g \rangle}(\psi).$$

$$\textcircled{4} \quad S_H^0(\psi) = S^0(\psi) \cap S_H(\psi).$$

$$\textcircled{5} \quad S_H^1(\psi) = S^1(\psi) \cap S_H(\psi), \quad (\text{特に } S_g^1(\psi) = S^1(\psi) \cap S_g(\psi)).$$

と表わす。

あきらかに

Prop. 1.3 $\forall g \in G$ に対して

$$\textcircled{1} \quad x \in S(\psi) \text{ ならば } \psi_g(x) \in S(\psi)$$

$$\textcircled{2} \quad x \in S^0(\psi) \text{ ならば } \psi_g(x) \in S^0(\psi)$$

$$\textcircled{3} \quad x \in S^1(\psi) \text{ ならば } \psi_g(x) \in S^1(\psi)$$

$$\textcircled{4} \quad x \in S_H(\psi) \text{ ならば } \psi_g(x) \in S_H(\psi)$$

が成り立つ。

§2 $S^1(\psi)$ について (その位置の決定)

この節で我々は $S^1(\psi)$ の状態と M での位置を決定しよう。そのために次の命題を使う (この命題は1次元多様体だが色々な定義は§1と同じ.)

Prop. 2.1 finite Abelian action $\psi(G, S^1)$ on 1-sphere S^1 は次の(1)~(3)のいずれかと congruent (equivalent) である。

(1) $G = \mathbb{Z}_n$ で ψ は free

(2) $G = \mathbb{Z}_2$ で ψ は reflection よって $S(\psi)$ は 2つの孤立点からなる。

(3) $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ で $\{x_1, x_2\}$ を G の生成系とするとき ψ_{x_1} は (x 軸の) reflection で ψ_{x_2} は (y 軸の) reflection よって $S(\psi)$ は 4つの孤立点からなる。

[略証] まず 閉区間 $I = [0, 1]$ 上の finite Abelian action $\bar{\psi}(G, I)$ は $G = \mathbb{Z}_2$ で $\bar{\psi}_0(g, x) = 1-x$ ($g \in G, g \neq e$) なる写像 $\bar{\psi}_0$ と congruent なものしかないことを示し, (下の証明で使っている)

① ψ が free な時は S^1 上の点 x をとり $A = \{\psi_g(x) \mid g \in G\}$ とおけば A は $n = |G|$ (G の order) の点からなるので, それらを順番に x_1, x_2, \dots, x_n ($x_1 = x$) とする。そしてこれらの間の arc を I_1, I_2, \dots, I_n とおく ($\partial I_i = \{x_i, x_{i+1}\}$)。このとき x_2 に対して $\exists g_0 \in G$ ($g_0 \neq e$); $x_2 = \psi_{g_0}(x_1)$ 。すると ψ は free より $\psi_{g_0}(I_1) = I_1$ ではないので $\psi_{g_0}(I_1) = I_2$ よって $H = \{g_0^i \in G \mid i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$ とおくと $\{\psi_{g'}(x) \mid g' \in H\} = A$ をみとるので $G = H = \mathbb{Z}_n$ 。

② ψ が free でない時は $S(\psi)$ の点 x をとると $\psi_{g_1}(x) = x$ をみとす元 $g_1 \in G$ が存在する。この時と同様に $A = \{\psi_g(x) \mid g \in G\}$ とおき (A は G の

order $|G| = n$ より少ない

点からなるので) これらを

順番に x_1, x_2, \dots, x_a

($x = x_1$) とおく ($a < n$).

同様に I_1, I_2, \dots, I_a

をとる ($\exists I_i = \{x_i, x_{i+1}\}$).

そして $a \geq 2$ のときと

$a = 1$ の場合に分ける。

(① - (i)) $a \geq 2$ のときは

$x_2 = \psi_{g_0}(x_1)$ をみえす G の

元 g_0 ($\neq e$) をとっておく。この g_0 によって $\psi_{g_0}(I_1)$

$= I_1$ または $\psi_{g_0}(I_1) = I_2$ である。まず $\psi_{g_0}(I_1) = I_1$ のと

きは $g_0 \neq g_1$ で a : 偶数 I_1 と $I_{a/2+1}$ に ψ_{g_0} による不

動点がある (y, z とする) ことが分かる。次に $\psi_{g_1}, \psi_{g_1}(y)$

を考えれば $a = 2$ で $\psi_{g_1}(y) = z$ が示される。故にこの時は

ψ_{g_1} による不動点は x_1, x_2 となり これらの結果より G

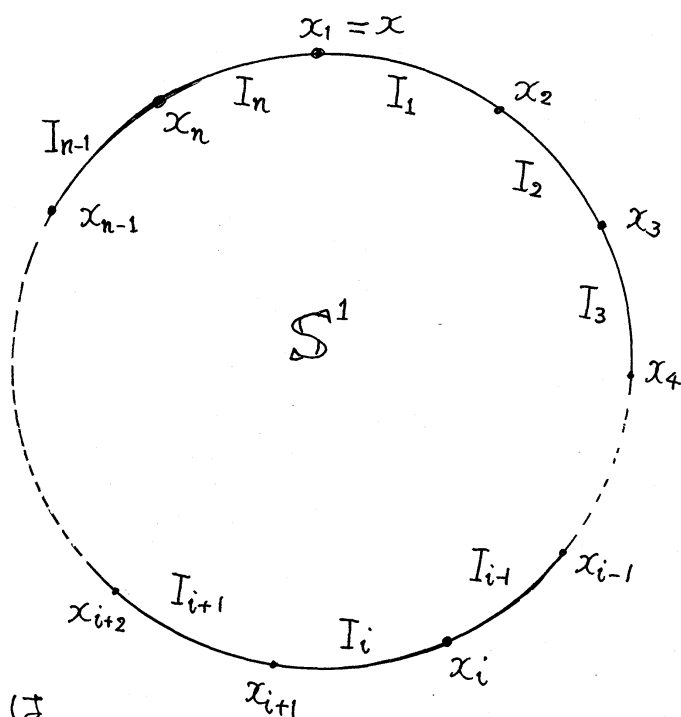
$= \{e, g_1, g_0, g_0 g_1\}$ となり (3) の場合になる。次に

$\psi_{g_0}(I_1) = I_2$ のとき $a \geq 3$ ならば ψ は free になるの

で $a = 2$ で $\psi_{g_0}(I_2) = I_1$ 故に free でないときは ψ_{g_0} の

不動点が x_1, x_2 となり $G = \{e, g_0\}$ で (2) の場合にな

る。



① の場合

(⑩ - (ii)) $a = 1$ のときは $S^1 - \{x_1\}$ に ψ_{g_1} を制限すれば, $\exists y \in S^1 - \{x_1\} ; \psi_{g_1}(y) = y$ となり $G = \{e, g_1\}$ で (2) の場合になる。

さて M が 2 次元多様体にもとって, finite Abelian action $\psi(G, M)$ について考える. その時次の Lemma が基本的である.

Lemma 2.1 $x \in S^1(\psi)$ に対して $\exists V(x) ; x$ の近傍 s.t. $(\overline{V(x)}, \overline{V(x)} \cap S(\psi))$ は $(I \times J, I \times \{0\})$ と同相 (ここに $I = J = [-1; 1]$ (閉区間) $\overline{V(x)}$ は $V(x)$ の閉包を表わす).

このとき x の Isotropy group I_x は order 2 の部分群である.

[証明] $V(x)$ を十分小さくとれば $\exists g \in G (g \neq e)$ s.t. $\psi_g(V(x)) = V(x)$. $x_0 = p(x)$ とおけば $x_0 \in \partial X (X = M/\psi)$. y_0 を x_0 の十分近くにとれば $y_0 \in p(V(x))$. そこで $p^{-1}(y_0) \cap V(x) \neq \emptyset$ 故に $\exists y \in p^{-1}(y_0) \cap V(x)$. この時 $p^{-1}(x_0) = \{x_1, x_2, \dots, x_a\}$ とすれば $p^{-1}(y_0) = \{y_1, y_1', y_2, y_2', \dots, y_a, y_a'\}$ となり $(y = y_1, x = x_1)$, $y \notin S(\psi)$ 故に $2a = |G|$. 故に $a = |G|/2$. 次に G/I_x と $p^{-1}(x)$ は $[g] \longleftrightarrow \psi_g(x)$ で全単射故に $|G/I_x| = |G|/2$. よって I_x は order 2 の部分群である。

Cor. $z_j = y_j^{2^{e_j}-1} (j=1, 2, \dots, s)$ とおき $B = \langle x_1, x_2, \dots, x_{e_0}, z_1, z_2, \dots, z_s \rangle$ とおけば, 上の Lemma

の条件を満たす $x \in S^1(\psi)$ に対しては $\exists! b \in B$ s.t.

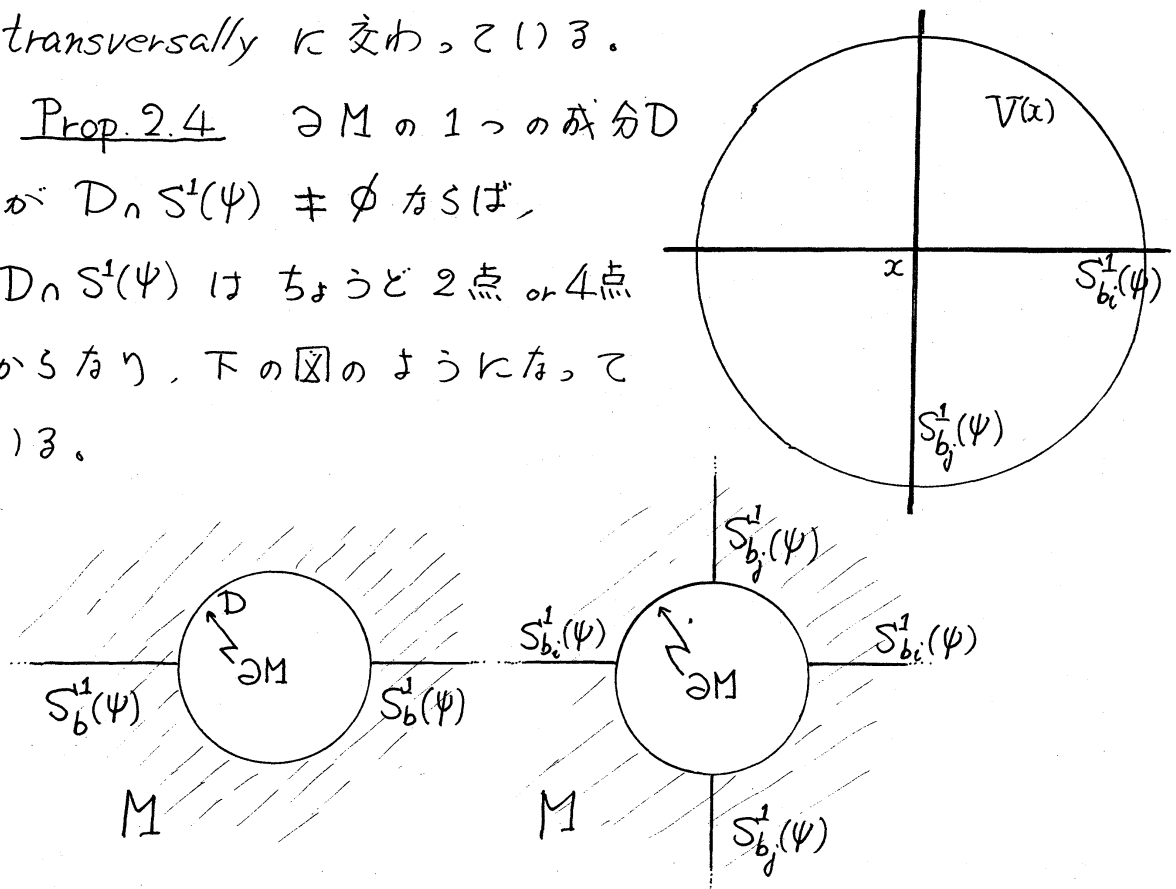
$$I_x = \langle b \rangle = \{e, b\}.$$

すると Prop. 2.1 を使えば (十分小さい x の近傍 $V(x)$ の境界に対して)

Prop. 2.2 $S_b^1(\psi)$ ($b \in B$) の連結成分は simple proper arc か simple loop である。さらにお互いに交わらない。

Prop. 2.3 $S^1(\psi)$ は B の元 b_1, b_2, \dots, b_g が存在して $S^1(\psi) = S_{b_1}^1 \cup S_{b_2}^1 \cup \dots \cup S_{b_g}^1$ と表わせられ, さらに $S^1(\psi)$ は 2 重点しかなく, その 2 重点 x においては 2 つの B の元 b_i, b_j ($b_i \neq b_j$) が存在して $S_{b_i}^1$ と $S_{b_j}^1$ が x で transversally に交わっている。

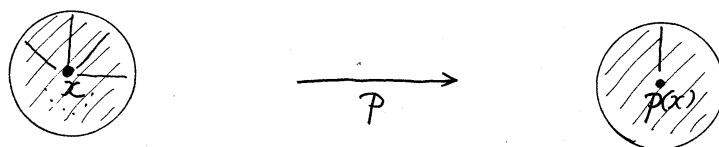
Prop. 2.4 ∂M の 1 つの成分 D が $D \cap S^1(\psi) \neq \emptyset$ ならば, $D \cap S^1(\psi)$ は ちょうど 2 点 or 4 点からなり, 下の図のようになっている。



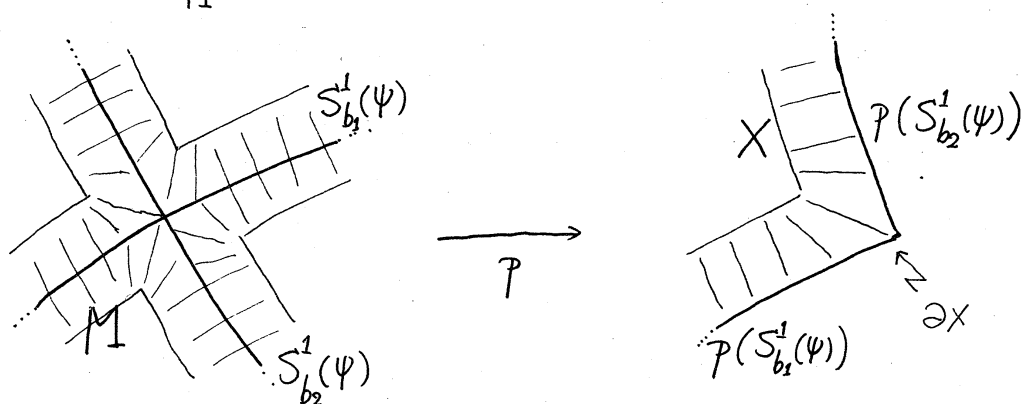
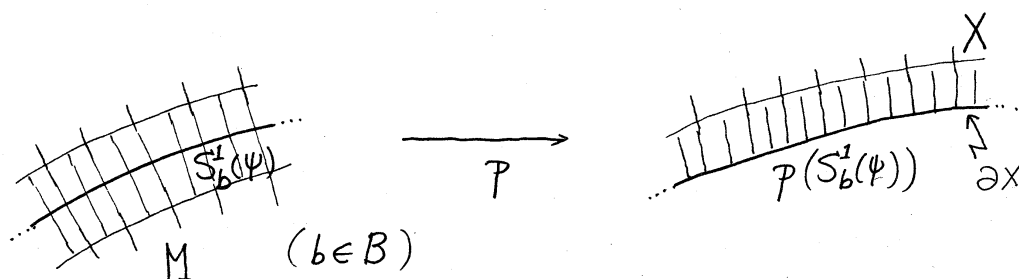
これらの結果をまとめると、

Prop. 2.5 $S(\psi)$ の M での位置 及び $p: M \rightarrow X = M/\psi$ によって (近傍も含めて) 次のようになっている。

(i) 孤立点 $x (\in S^0(\psi))$

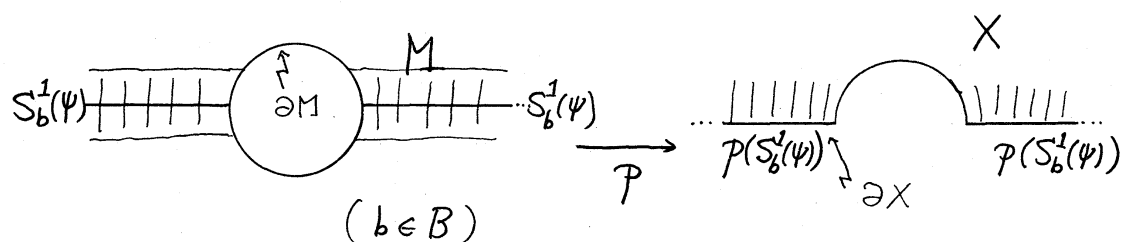


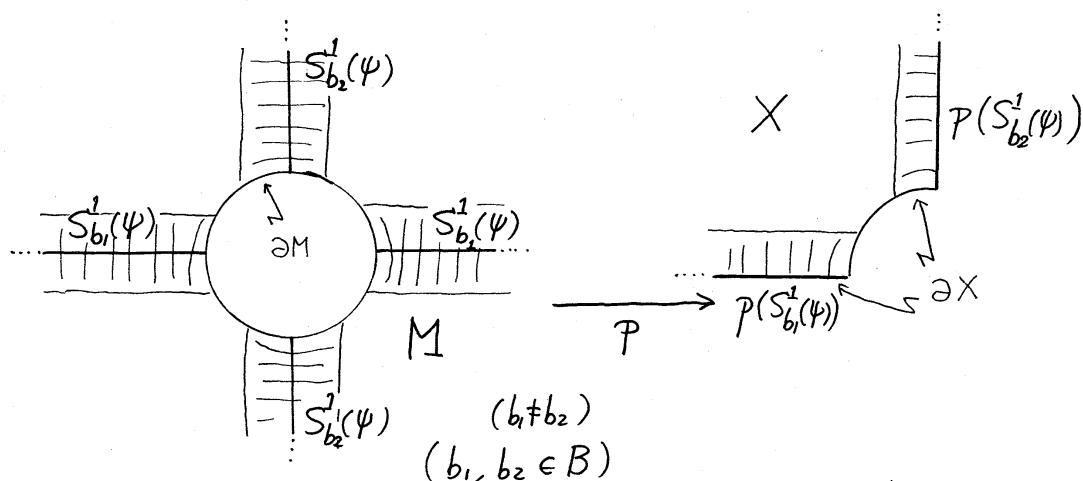
(ii)



$(b_1, b_2 \in B) (b_1 \neq b_2)$

(iii)





[注] s -action に対しても, 同様な結果が成り立つ。

§ 3 Reducing operation (of $S^1(\psi)$)

finite Abelian action $\psi \in \mathcal{O}(G, M)$ に対して, $B(\psi) = \{b \in B \mid S_b^1(\psi) \neq \emptyset\}$ とおき, $S_b^1(\psi)$ を除去する操作を定義しよう. そのために $b \in B(\psi)$ とおけば

Lemma 3.1 $M - S_b^1(\psi)$ が連結でないとき, $M - S_b^1(\psi)$ はちょうど2つの連結成分からなり, M_1 とその一つの連結成分の閉包とすると M_1 も compact 2次元多様体であり, $S_b^* = M_1 \cap S_b^1(\psi)$ とおくと $S_b^* \subset \partial M_1$ である. 次に $G_1 = \{g \in G \mid \psi_g(M_1) = M_1\}$ とおくと, 明らかに

① G_1 は index 2 の G の部分群.

② $b \notin G_1$

③ $G' \subset G_1$

をみえる. そこで $\psi_1 : G_1 \times M_1 \longrightarrow M_1$ と

$$\psi_1(g_1, x_1) = \psi(g_1, x_1) \quad (\forall g_1 \in G_1, \forall x_1 \in M_1)$$

と定めると ψ_1 は finite Abelian action (on M_1) 次の性質をみたす。〈今後 群においては C を部分群を表わす〉

$$(I) \quad S_h^1(\psi_1) = S_h^1(\psi) \cap M_1 \quad h \in B(\psi) \cap G_1$$

$$(II) \quad S_H^0(\psi_1) = S_H^0(\psi) \cap M_1 \quad H \subset G_1$$

$$(III) \quad \psi_1(g_1, S_b^*) = S_b^* \quad g_1 \in G_1$$

$$\text{さらに } S_h^1(\psi) = \emptyset \quad (h \notin G_1, h \neq b), \quad S_H^0(\psi) = \emptyset \quad (H \not\subset G_1)$$

をみたしてゐたことが分かる。また $B(\psi) = B(\psi_1) \cup \{b\}$

したがって $S_1^* = S_b^*$, $S_1^\otimes = (S_1^*)$ とおけば ψ_1 は finite Abelian s -action $\mathcal{O}_s(G_1, M_1, S_1^\otimes)$ の元になる。

[証明]

$M = S^1(\psi)$ が 2 つの連結成分になることは [9]。§3.

Lemma 1 (p17) と同様に見える。

$S^1(\psi_1)$ or $S^1(\psi)$ に関する部分は、次の二つ (*, **) を示せば明らか。

$$* \quad x \in S_b^1(\psi) \text{ なら } x \notin S_h^1(\psi) \quad (\forall h \in B, h \neq g_1) \text{ なるは } x \notin S^1(\psi_1) \quad \square$$

⊙ $x \in S^1(\psi_1)$ とすると $x \in S^1(\psi)$ なる x には $\exists b' \in B \quad \psi_{b'}(x) = x$ だが仮定より $b' = b$ しかない。故に $\psi_1(g, x) = \psi(g, x) = x, g \neq e \rightarrow g = b$ だが $b \notin G_1$ (矛盾)

$$** \quad h \notin G_1, h \neq b \text{ なるは } S_h^1(\psi) = \emptyset \quad \square$$

⊙ $\exists h \notin G_1, (h \neq b), \exists x \in S_h^1(\psi) \text{ st. } \psi_h(x) = x$ とすれば $\psi_h(M_1) \neq M_1$ より $x \in M_1 \cap \overline{M - M_1} = S_b^1(\psi)$ 。 x の近傍を考えると、 $x \in S_{bh}^1(\psi)$ となり矛盾

$S^0(\psi), S^0(\psi)$ に関しては明らかに示せる.

Cor. この時, $\forall h \in B$ に対して

$S_h^1(\psi) \neq \emptyset$ かつ $S_{bh}^1(\psi) \neq \emptyset$ であることではない。

Lemma 3.2 $M - S^1(\psi)$ が連結の時, $M - S^1(\psi)$ の Riemann metric による completion [完備化] (natural compactification) を M_1 とおくと M_1 は compact 2次元多様体で, $S_b^* = M_1 - (M - S_b^1(\psi))$ とおくと $S_b^* \subset \partial M_1$ である。このとき, $G_1 = G$ とし $\psi_1 : G_1 \times M_1 \longrightarrow M_1$ を

- $x \in M_1 - S_b^*$ のときは $\psi_1(g_1, x) = \psi(g_1, x) \quad g_1 \in G_1$
- $x \in S_b^*$ のときは x に収束する $M_1 - S_b^*$ の点列 $\{x_i\}$ をとり $\psi_1(g_1, x) = \lim \psi_1(g_1, x_i) \quad (g_1 \in G_1)$

と定めると ψ_1 は well-defined でさらに次の性質をみたす。

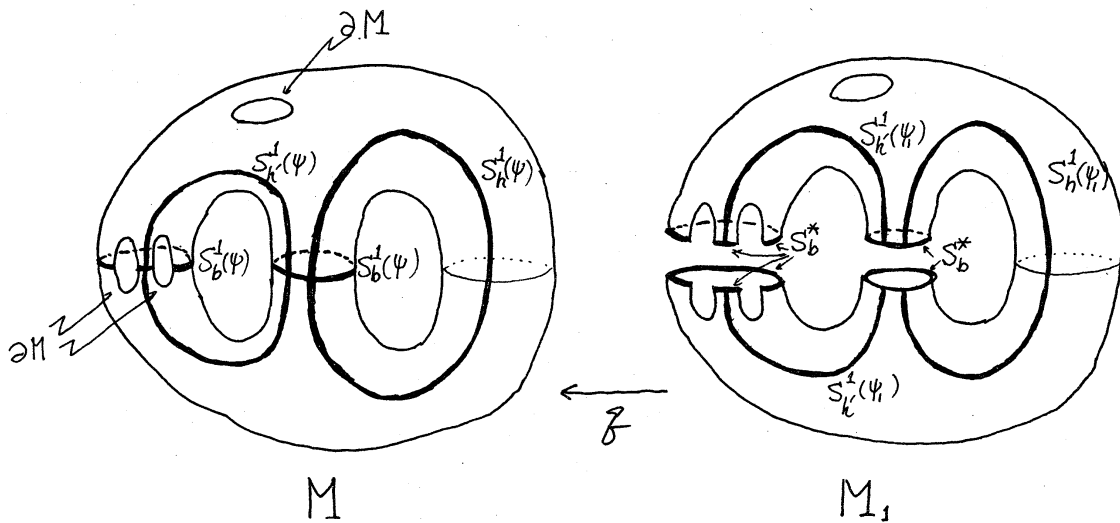
$$(I) \quad S_h^1(\psi_1) = g^{-1}(S_b^1(\psi)) \quad h \in B \quad h \neq b$$

$S_b^1(\psi_1) = \emptyset$ ここに $g : M_1 \longrightarrow M$ (natural projection) を表わす。

$$(II) \quad S_H^0(\psi_1) = g^{-1}(S_H^0(\psi)) \quad H \subset G_1$$

$$(III) \quad \psi_1(g_1, S_b^*) = S_b^* \quad g_1 \in G_1$$

よって $B(\psi) = B(\psi_1) \cup \{b\}$ 。そこで $S_i^* = S_b^*$, $S_i^{\otimes} = (S_i^*)$ とおけば ψ_1 は finite Abelian s-action すなわち $\mathcal{O}_s(G_1, M_1, S_i^{\otimes})$ の元になる。



[証明] まず次の図式が可換であることも示す.

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 \times M_1 & \xrightarrow{\psi_1} & M_1 \\
 \downarrow \text{id} \times \downarrow g & & \downarrow g \\
 G \times M & \xrightarrow{\psi} & M
 \end{array}$$

それは $x \notin S_b^*$ なる定義より明らか. また $x \in S_b^*$ のときは, 定義により点列 $\{x_i\}$ ($\text{in } M_1 - S_b^*$) で $\lim x_i = x$ なるものとせば $g \in G$ に対して $g \psi_1(g, x) = g(\lim \psi_1(g, x_i)) = \lim (g \psi_1(g, x_i)) = \lim \psi(g, g(x_i)) = \psi(g, g(x))$ より示される.

よって $g(S^1(\psi_1)) \subset S^1(\psi)$. 次に $h \in B$ $h \neq b$ のとき $S_h^1(\psi_1) = g^{-1}(S_h^1(\psi))$ を示す. これは $x \notin S_b^*$ のときは明らか. $x \in S_b^*$ のとき $x \in S_h^1(\psi_1)$ なる x の近傍での図式を使えば $g(x) \in S_h^1(\psi)$. また $x \in g^{-1}(S_h^1(\psi))$ に対して $S_h^1(\psi) - g(x)$ の1つの成分上で $g(x)$ に収束する点列をとれば ψ_1 の定義より $x \in S_h^1(\psi_1)$.

さて $\exists x \in S_b^1(\psi)$ とする. もしも $x \notin S_b^*$ のときは定義よりあきらかである. $x \in S_b^*$ のときは $x \in S^1(\psi)$ だから ψ の性質 (Prop 2.5 etc.) を使えば $\exists h \in G_1 = G$ st. $x \in S_h^1(\psi)$ だから上の図式を考えれば $h=b$ で $S_h^1(\psi)$ は M_1 上の proper arc で, その境界に x があるのだから φ を移せば $\varphi(S_b^*) \subset \varphi(S_h^1(\psi))$ も $S_b^1(\psi)$ の部分集合になり $S^1(\psi)$ の性質 (Prop 2.5 etc.) に矛盾する. よって $S_b^1(\psi) = \emptyset$.

(II) (III) についても同様にできる.

定義 3.1 finite Abelian action $\psi \in \mathcal{O}(G, M)$ を Lemma 3.1 あるいは Lemma 3.2 によって ~~構成~~ ^{ψ から} される finite Abelian s-action $\psi_1 \in \mathcal{O}_s(G_1, M_1, S_1^{\otimes})$ に変える操作を元 $b \in B(\psi)$ による (あるいは $S_b^1(\psi)$ による) ψ の reducing operation といい,
 $\psi \xrightarrow{b} \psi_1$ あるいは $\psi(G, M) \xrightarrow{b} \psi_1(G_1, M_1, S_1^{\otimes})$
 と表わす.

finite Abelian s-action $\psi_{i-1} \in \mathcal{O}_s(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes})$ に対しても $B(\psi_{i-1})$ の元 $b_{i-1} = b$ をとり, $S_b^1(\psi_{i-1})$ を除きすることとを考えよう.

Lemma 3.3 $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ が連結でないとき, Lemma 3.1 と同様に $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ はちょうど2つの連結成分からなる

ので, その一つの連結成分の閉包を M_i とし, $S_i^{**} = M_i \cap S_b^1(\psi_{i-1})$, $S_k^{**} = S_k^* \cap M_i$ ($1 \leq k \leq i-1$) とおくと $S_i^{**}, S_k^{**} \subset \subset M_i$ で (ここに $S_{i-1}^{\otimes} = (S_1^*, S_2^*, \dots, S_{i-1}^*)$), $G_i = \{g \in G_{i-1} \mid \psi_{i-1}(g, M_i) = M_i\}$ とおくと Lemma 3.1 と同様に

① G_i は index 2 の G_{i-1} の部分群

② $b = b_i \notin G_i$ ③ $G' \subset G_i$

をみたすので, $\psi_i : G_i \times M_i \longrightarrow M_i$ と

$$\psi_i(g, x) = \psi_{i-1}(g, x) \quad (\forall g \in G_i, \forall x \in M_i)$$

と定めると ψ_i は finite Abelian action (on M_i) で, 次の性質をみたす。

$$(I) \quad S_h^1(\psi_i) = S_h^1(\psi_{i-1}) \cap M_i \quad h \in B(\psi_{i-1}) \cap G_i$$

$$(II) \quad S_H^0(\psi_i) = S_H^0(\psi_{i-1}) \cap M_i \quad H \subset G_i$$

$$(III) \quad \psi_i(g, S_j^{**}) = S_j^{**} \quad (1 \leq j \leq i) \quad g \in G_i$$

さらに Lemma 3.1 と同様に $S_h^1(\psi_{i-1}) = \emptyset$ ($h \notin G_i, h \neq b$),

$$S_H^0(\psi_{i-1}) = \emptyset \quad (H \not\subset G_i), \quad B(\psi_{i-1}) = B(\psi_i) \cup \{b_i\} \text{ が成り立つ。}$$

したがって $S_i^{\otimes} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \dots, S_i^{**})$ とおけば ψ_i は finite Abelian s-action $\mathcal{M}_s(G_i, M_i, S_i^{\otimes})$ の元になる。

[注] この時は Lemma 3.1 の Cor. は成立するとは限らない。

Lemma 3.4 $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ が連結のとき, Lemma 3.2

と同様に $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ の Riemann metric による completion

(完備化) (natural compactification) を M_i とし, $S_i^{**} = M_i - (M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1}))$, $S_k^{**} = g^{-1}(S_k^*)$ ($1 \leq k \leq i-1$) とおくと $S_i^{**}, S_k^{**} \subset \partial M_i$ で (ここに $S_{i-1}^{\otimes} = (S_1^*, S_2^*, \dots, S_{i-1}^*)$), $g: M_i \longrightarrow M_{i-1}$ (natural projection)) がある。

このとき $G_i = G_{i-1}$ とし $\psi_i: G_i \times M_i \longrightarrow M_i$ を

• $x \in M_i - S_i^{**}$ のとき $\psi_i(g, x) = \psi_{i-1}(g, x)$ ($g \in G_i$)

• $x \in S_i^{**}$ のとき x に収束する $M_i - S_i^{**}$ の点列 $\{x_j\}$

をとり $\psi_i(g, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_i(g, x_j)$ ($g \in G_i$)

と定めると ψ_i は well-defined で Lemma 3.2 と同様に次の性質をみたす。

$$(I) \quad S_h^1(\psi_i) = g^{-1}(S_h^1(\psi_{i-1})) \quad h \in B, h \neq b$$

$$S_b^1(\psi_i) = \emptyset$$

$$(II) \quad S_H^0(\psi_i) = g^{-1}(S_H^0(\psi_{i-1})) \quad H \subset G_i$$

$$(III) \quad \psi_i(g, S_j^{**}) = S_j^* \quad (1 \leq j \leq i) \quad g \in G_i$$

よって $B(\psi_{i-1}) = B(\psi_i) \cup \{b\}$. ところで $S_i^{\otimes} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \dots,$

$\dots, S_i^{**})$ とおけば ψ_i は finite Abelian s -action

$\mathcal{A}_s(G_i, M_i, S_i^{\otimes})$ の元になる。

定義 3.2 finite Abelian s -action $\psi_{i-1} \in \mathcal{A}_s(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes})$ を Lemma 3.3 あるいは Lemma 3.4 によって ψ_{i-1} から構成される finite Abelian s -action $\psi_i \in \mathcal{A}_s(G_i, M_i, S_i^{\otimes})$

に変える操作も 定義 3.1 と同様に 元 $b \in B(\psi_{i-1})$ による (あるいは $S_b^1(\psi_{i-1})$ による) ψ_{i-1} の reduction operation と (1) (1), $\psi_{i-1} \xrightarrow{b} \psi_i$ あるいは $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes}) \xrightarrow{b} \psi_i(G_i, M_i, S_i^{\otimes})$ と表わす。

[注] 定義 3.1 の reducing operation も この定義の reducing operation の特別な場合と考えられる。

$B(\psi)$ は有限なので, 任意の finite Abelian action ψ に対して 有限回の reducing operation を行なえば, 1 次元 singular set のな (1) finite Abelian s-action が作られる。

§ 4 finite Abelian (s-)action の (s-)congruence (equivalence) class の対応.

前節の reducing operation によって (s-)congruence (equivalence) class は 単射になることも この節で示そう。

finite Abelian s-action $\psi_{i-1} \in \mathcal{O}_s(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes})$ に対して $b = b_i \in B(\psi_{i-1}) (\subset G_{i-1})$ による reducing operation によって得られる finite Abelian s-action を $\psi_i \in \mathcal{O}_s(G_i, M_i, S_i^{\otimes})$ とし, また $\hat{\psi}_{i-1} \in \mathcal{O}_s(\hat{G}_{i-1}, \hat{M}_{i-1}, \hat{S}_{i-1}^{\otimes})$ に対して も 同じ元 $b = b_i \in B(\hat{\psi}_{i-1}) (\subset \hat{G}_{i-1})$ による reducing operation によって得られる finite Abelian s-action を $\hat{\psi}_i \in \mathcal{O}_s(\hat{G}_i, \hat{M}_i, \hat{S}_i^{\otimes})$ とするとき ((注) 一般には $B(\psi_{i-1})$ と $B(\hat{\psi}_{i-1})$ に

同じ元 ($b = b_i$) があるとは限らない), もしも $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ と $\tilde{M}_{i-1} - S_b^1(\tilde{\psi}_{i-1})$ も共に連結でないとき

Lemma 4.1 $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^*)$ と $\tilde{\psi}_{i-1}(G_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}, \tilde{S}_{i-1}^*)$ が s -congruent (s -equivalent) であるならば $\psi_i(G_i, M_i, S_i^*)$ と $\tilde{\psi}_i(\tilde{G}_i, \tilde{M}_i, \tilde{S}_i^*)$ も s -congruent (s -equivalent) であり, 逆に上のようにして作った $\psi_i(G_i, M_i, S_i^*)$ と $\tilde{\psi}_i(\tilde{G}_i, \tilde{M}_i, \tilde{S}_i^*)$ が s -congruent (s -equivalent) であるならば, もとの $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^*)$ と $\tilde{\psi}_{i-1}(G_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}, \tilde{S}_{i-1}^*)$ も s -congruent (s -equivalent) である.

[証明] (\Rightarrow) 仮定によって, 次のような条件をみたす同相写像 $h: M_{i-1} \rightarrow \tilde{M}_{i-1}$ が存在する. (h : onto)

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{ccc} G_{i-1} \times M_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & M_{i-1} \\ \downarrow \text{id} \times \downarrow h & & \downarrow h \\ G_{i-1} \times \tilde{M}_{i-1} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_{i-1}} & \tilde{M}_{i-1} \end{array} \quad \text{が可換.}$$

$$\textcircled{2} \quad h(S_k^*) = \tilde{S}_k^* \quad \text{但し} \quad S_{i-1}^* = (S_1^*, S_2^*, \dots, S_{i-1}^*), \\ (1 \leq k \leq i-1) \quad \tilde{S}_{i-1}^* = (\tilde{S}_1^*, \tilde{S}_2^*, \dots, \tilde{S}_{i-1}^*).$$

このとき Lemma 3.3 によって M_{i-1}, \tilde{M}_{i-1} から (b によって) 作られる 2次元多様体が M_i, \tilde{M}_i であるが, 上の写像 h によって $h(M_i) = \tilde{M}_i$ として一般性を失うわけではない. ($h(S_b^1(\psi_{i-1})) = S_b^1(\tilde{\psi}_{i-1})$ だから) すると $G_i = \tilde{G}_i$ である. なぜならば $\forall g \in G_i$ に対して $\tilde{\psi}_{i-1}(g, \tilde{M}_i) = \tilde{\psi}_{i-1}(g, h(M_i))$

$$= h \cdot \psi_{i-1}(g, M_i) = h(M_i) = \tilde{M}_i \quad \text{だから} \quad g \in \tilde{G}_i$$

(①より)

逆も同様にして $\forall g \in \tilde{G}_i \longrightarrow g \in G_i$ 。

次に $h_+ = h|_{M_i}$ とおけば (h の M_i への制限) $\forall g \in G_i$
 $= \tilde{G}_i$, $\forall x \in M_i$ に対して $h_+ \cdot \psi_i(g, x) = h \cdot \psi_i(g, x) =$
 $h \cdot \psi_{i-1}(g, x) = \tilde{\psi}_{i-1}(g, h(x)) = \tilde{\psi}_i(g, h(x)) = \tilde{\psi}_i(g, h_+(x))$
 (①より)

より

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{式}} & G_i \times M_i & \xrightarrow{\psi_i} M_i \\ & \downarrow \text{id} \times \downarrow h_+ & \downarrow h_+ \\ & \tilde{G}_i \times \tilde{M}_i = G_i \times \tilde{M}_i & \xrightarrow{\tilde{\psi}_i} \tilde{M}_i \end{array} \quad \text{が可換であり、}$$

①と h_+ の定義と $S_k^{**}, \tilde{S}_k^{**}$ ($1 \leq k \leq i-1$) の定義 によって
 $h_+(S_k^{**}) = \tilde{S}_k^{**}$ であり $S_i^{**}, \tilde{S}_i^{**}$ の作り方より $h_+(S_i^{**})$
 $= \tilde{S}_i^{**}$ が成立する。ここに $S_i^{\oplus} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \dots, S_{i-1}^{**}, S_i^{**})$
 $\tilde{S}_i^{\oplus} = (\tilde{S}_1^{**}, \tilde{S}_2^{**}, \dots, \tilde{S}_{i-1}^{**}, \tilde{S}_i^{**})$ とある。

(\Leftarrow) 仮定によって $G_i = \tilde{G}_i$ と次の条件をみたす
 M_i から \tilde{M}_i の上への同相写像 $h : M_i \longrightarrow \tilde{M}_i$ が存在
 する。

$$\begin{array}{ccc} \text{① 式} & G_i \times M_i & \xrightarrow{\psi_i} M_i \\ & \downarrow \text{id} \times \downarrow h & \downarrow h \\ & G_i \times \tilde{M}_i & \xrightarrow{\tilde{\psi}_i} \tilde{M}_i \\ & \parallel & \\ & \tilde{G}_i \times \tilde{M}_i & \end{array} \quad \text{が可換であり}$$

$$\textcircled{2} \quad h(S_k^{**}) = \tilde{S}_k^{**} \quad \text{但し} \quad S_i^{\oplus} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \dots, S_i^{**}), \\ (1 \leq k \leq i) \quad S_i^{\oplus} = (\tilde{S}_1^{**}, \tilde{S}_2^{**}, \dots, \tilde{S}_i^{**}).$$

このとき M_{i-1} から \tilde{M}_{i-1} (の上) への写像 $h_- : M_{i-1} \longrightarrow \tilde{M}_{i-1}$

$$\text{を} \quad \begin{cases} h(x) & x \in M_i \\ \tilde{\psi}_{i-1}(b, h(\psi_{i-1}(b, x))) & x \in \overline{M_{i-1} - M_i} (= M_i' \text{ とおく}) \end{cases}$$

と定める。すると Lemma 3.4 の作りおきより $(x \in S_i^{**} \iff x \in S_b^1(\psi_{i-1}))$

だから $x \in M_i \cap M_i'$ ならば $x \in S_i^{**}$ 故に $\psi_{i-1}(b, x) = x$,

また $h(x) \in \tilde{S}_i^{**}$ より $\tilde{\psi}_{i-1}(b, h(x)) = h(x)$ かつ $\tilde{\psi}_{i-1}(b, h(\psi_{i-1}(b, x))) = \tilde{\psi}_{i-1}(b, h(x)) = h(x)$ が成り立つので well-

defined で h_- は (onto で ある) 同相写像 (h が同相写像より)

である。

$$\text{次に 図式} \quad \begin{array}{ccc} G_{i-1} \times M_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & M_{i-1} \\ \downarrow \text{id} \times \downarrow h_- & & \downarrow h_- \\ G_{i-1} \times \tilde{M}_{i-1} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_{i-1}} & \tilde{M}_{i-1} \end{array} \quad \text{が可換であること}$$

とは $g \in G_{i-1}$, $x \in M_{i-1}$ をそれぞれ G_i or bG_i に属して

いる ($G_{i-1} = G_i \cup bG_i$) 場合, M_i or M_i' に属している場合

に分けてやればよい。例えば $g \in G_i$, $x \in M_i'$ のとき

$$\begin{aligned} \psi_{i-1}(g, x) &\in M_i' \text{ 且 } \psi_{i-1}(gb, x) \in M_i, \quad \psi_{i-1}(b, x) \in M_i \text{ 且 } \\ h(\psi_{i-1}(b, x)) &\in \tilde{M}_i \text{ 故に } h_- \psi_{i-1}(g, x) = \tilde{\psi}_{i-1}(b, h \psi_{i-1}(b, \psi_{i-1}(g, x))) \\ &= \tilde{\psi}_{i-1}(b, h \psi_{i-1}(bg, x)) = \tilde{\psi}_{i-1}(b, h \psi_{i-1}(g, \psi_{i-1}(b, x))) \\ &= \tilde{\psi}_{i-1}(b, h \psi_{i-1}(g, \psi_{i-1}(b, x))) = \tilde{\psi}_{i-1}(b, \tilde{\psi}_{i-1}(g, h \psi_{i-1}(b, x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{\psi}_{i-1}(b, \tilde{\psi}_{i-1}(g, h \psi_{i-1}(b, x))) = \tilde{\psi}_{i-1}(bg, h \psi_{i-1}(b, x)) \\
&= \tilde{\psi}_{i-1}(g, \tilde{\psi}_{i-1}(b, h \psi_{i-1}(b, x))) = \tilde{\psi}_{i-1}(g, h_-(x))
\end{aligned}$$

となる。その他の場合も同様に示される。

そして $x \in S_b^* \ (1 \leq b \leq i-1)$ ならば $h_-(x) \in \tilde{S}_b^*$ かつ h_- の定め方, S_b^* と \tilde{S}_b^* の作り方より明らかに示される。

したがって $\psi_{i-1} \xrightarrow{b} \psi_i$, $\tilde{\psi}_{i-1} \xrightarrow{b} \tilde{\psi}_i$ (lemma 3.3
 により作られた b による reducing operation) とするとき
 $(\psi_{i-1}, \tilde{\psi}_{i-1} \in \mathcal{R}(G_{i-1}))$

ψ_i と $\tilde{\psi}_i$ が s -congruent ならば ψ_{i-1} と $\tilde{\psi}_{i-1}$ は s -congruent であることが示される。

<注> もしも ψ_{i-1} と $\tilde{\psi}_{i-1}$ が s -congruent ならば,
 $B(\psi_{i-1}) = B(\tilde{\psi}_{i-1})$ かつ $\square M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ が連結でないことと $\square \tilde{M}_{i-1} - S_b^1(\tilde{\psi}_{i-1})$ が連結でないことは同値である。

また $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ と $\tilde{M}_{i-1} - S_b^1(\tilde{\psi}_{i-1})$ が共に連結であるとき

Lemma 4.2 $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\oplus})$ と $\tilde{\psi}_{i-1}(G_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}, \tilde{S}_{i-1}^{\oplus})$ が s -congruent (s -equivalent) であれば $\psi_i(G_i, M_i, S_i^{\oplus})$ と $\tilde{\psi}_i(\tilde{G}_i, \tilde{M}_i, \tilde{S}_i^{\oplus})$
 [lemma 3.4 により作られた] も s -congruent (s -equivalent) である。

あり, 逆に上のようにして作られた $\psi_i(G_i, M_i, S_i^{\otimes})$ と $\tilde{\psi}_i(\tilde{G}_i, \tilde{M}_i, \tilde{S}_i^{\otimes})$ が s -congruent (s -equivalent) であれば $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes})$ と $\tilde{\psi}_{i-1}(\tilde{G}_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}, \tilde{S}_{i-1}^{\otimes})$ も s -congruent (s -equivalent) である。

[証明] (\Rightarrow) 仮定によって, 次の条件をみたす M_{i-1} から \tilde{M}_{i-1} への同相写像 $h: M_{i-1} \rightarrow \tilde{M}_{i-1}$ が存在する。

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{ccc} G_{i-1} \times M_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} & M_{i-1} \\ \downarrow \text{id} \times \downarrow h & & \downarrow h \\ G_{i-1} \times \tilde{M}_{i-1} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_{i-1}} & \tilde{M}_{i-1} \end{array} \quad \text{が可換}$$

$$\textcircled{2} \quad h(S_k^*) = \tilde{S}_k \quad (1 \leq k \leq i-1) \quad \text{但し} \quad S_{i-1}^{\otimes} = (S_1^*, S_2^*, \dots, S_{i-1}^*) \\ S_{i-1}^{\otimes} = (\tilde{S}_1^*, \tilde{S}_2^*, \dots, \tilde{S}_{i-1}^*)$$

このとき Lemma 3.4 によって (b によって) M_{i-1}, \tilde{M}_{i-1} から作られる 2 次元多様体 M_i, \tilde{M}_i である。そこで M_i から \tilde{M}_i への写像 $h_+: M_i \rightarrow \tilde{M}_i$ を次のように定める。

$$\begin{array}{ccc} * \ x \notin S_i^{**} \text{ のとき} & h_+(x) \in \tilde{M}_{i-1} & M_i \longrightarrow \tilde{M}_i \\ \text{に対して } \exists! y \in \tilde{M}_i \text{ s.t. } \tilde{g}(y) = h_+(x) & & \downarrow g \quad \downarrow \tilde{g} \\ \text{だから } h_+(x) = y \text{ と定める。 (但し} & M_{i-1} \xrightarrow{h} \tilde{M}_{i-1} & \\ g: M_i \rightarrow M_{i-1}, \tilde{g}: \tilde{M}_i \rightarrow \tilde{M}_{i-1} \text{ は natural projection)} & & \end{array}$$

* $x \in S_i^{**}$ のとき x に収束する (M_i で) $M_i - S_i^{**}$ の点列 $\{x_j\}$ をとり $h_+(x) = \lim_j h_+(x_j)$ と定めると点列 $\{x_j\}$ のとり方によるので well-defined.

$$\begin{array}{ccc} G_i \times M_i & \xrightarrow{\psi_i} & M_i \\ \downarrow \text{id} \times \downarrow h_+ & & \downarrow h_+ \\ \tilde{G}_i \times \tilde{M}_i & \xrightarrow{\tilde{\psi}_i} & \tilde{M}_i \end{array} \quad \text{が可換}$$

$$(G_i = G_{i-1} = \tilde{G}_i)$$

であることは h_+ の定義より示される。 また $h_+(S_k^{**}) = \tilde{S}_k^{**}$

($1 \leq k \leq i$) は ①, h_+ の定義, $S_k^{**}, \tilde{S}_k^{**}$ ($1 \leq k \leq i-1$) の定義より明ら

かである。 $h_+(S_i^{**}) = \tilde{S}_i^{**}$ も作り方より示される。 ここに

$$S_i^{\oplus} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \dots, S_{i-1}^{**}, S_i^{**}), \quad \tilde{S}_i^{\oplus} = (\tilde{S}_1^{**}, \tilde{S}_2^{**}, \dots, \tilde{S}_{i-1}^{**}, \tilde{S}_i^{**})$$

である。

(\Leftarrow) act する群は $G_i = \tilde{G}_i = G_{i-1}$ 。 仮定により次の条件を満たす M_i から \tilde{M}_i の上への同相写像 $h: M_i \rightarrow \tilde{M}_i$ が存在する。

$$\begin{array}{ccc} G_i \times M_i & \xrightarrow{\psi_i} & M_i \\ \downarrow \text{id} \times \downarrow h & & \downarrow h \\ \tilde{G}_i \times \tilde{M}_i & = & G_i \times \tilde{M}_i \xrightarrow{\tilde{\psi}_i} \tilde{M}_i \end{array} \quad \text{が可換}$$

$$\textcircled{2} \quad h(S_k^{**}) = \tilde{S}_k^{**} \quad (1 \leq k \leq i) \quad \text{但し} \quad S_i^{\oplus} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \dots, S_i^{**}) \\ \tilde{S}_i^{\oplus} = (\tilde{S}_1^{**}, \tilde{S}_2^{**}, \dots, \tilde{S}_i^{**})$$

このとき 写像 $h_-: M_{i-1} \rightarrow \tilde{M}_{i-1}$ を $x \in M_{i-1}$ に

対して $\exists y \in M_i$ s.t. $g(y) = x$

$$M_i \xrightarrow{h} \tilde{M}_i$$

$$\downarrow g \quad \downarrow \tilde{g}$$

$$M_{i-1} \xrightarrow{\quad} \tilde{M}_{i-1}$$

なので $h_-(x) = \tilde{g}h(y)$ と定める。

(ここに $g: M_i \rightarrow M_{i-1}$,

$\tilde{g} : \tilde{M}_i \longrightarrow \tilde{M}_{i-1}$ は Lemma 3.4 で定めた natural projection を表わす。) すると $x \notin S'_b(\psi_{i-1})$ のときは y は unique なので o.k. また $x \in S'_b(\psi_{i-1})$ のとき $g(S_i^{**}) = S'_b(\psi_{i-1})$ より上でとった y は $y \in S_i^{**}$ での条件 ($g(y) = x$) を満たす M_i の元は y と $\psi_i(b, y)$ の二つであるが、これらは $\tilde{g}h\psi_i(b, y) = \tilde{g}\tilde{\psi}_i(b, h(y)) = \tilde{g}h(y)$ を満たすので ($h(S_i^{**}) = \tilde{S}_i^{**}$ $\tilde{g}(\tilde{S}_i^{**}) = S'_b(\tilde{\psi}_{i-1})$ より $h(y) \in S'_b(\tilde{\psi}_{i-1})$ なる) h_- は well-defined で明らかに M_{i-1} から \tilde{M}_{i-1} の上への同相写像となる。(h が同相写像より)

$$\begin{array}{ccc} \text{次に 図式} & G_{i-1} \times M_{i-1} & \xrightarrow{\psi_{i-1}} M_{i-1} \\ & \downarrow \text{id} \times \downarrow h_- & \downarrow h_- \\ & G_{i-1} \times \tilde{M}_{i-1} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_{i-1}} \tilde{M}_{i-1} \end{array}$$

が可換であることも示そう。

$\forall g \in G_{i-1}, \forall x \in M_{i-1}$ とすると $\exists y \in M_i$ st. $g(y) = x$ とする。そして $\psi_{i-1}(g, x) = x'$ とおき $\exists y' \in M_i$ st. $g(y') = x'$ とする。すると $\psi_{i-1}(g, x) = x'$ より $\psi_i(g, y) = y'$ なる

$$h_- \psi_{i-1}(g, x) = h_-(x') = \tilde{g}h(y') = \tilde{g}h\psi_i(g, y) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

次に $h_-(x) = \tilde{x} \in \tilde{M}_{i-1}$ に対して, $\exists \tilde{y} \in \tilde{M}_i$ st. $\tilde{g}(\tilde{y}) = \tilde{x}$ すると $x \notin S'_b(\psi_{i-1})$ なる $\tilde{x} \notin S'_b(\tilde{\psi}_{i-1})$ での y, \tilde{y} は unique なので $h(y) = \tilde{y}$ であるし, $x \in S'_b(\psi_{i-1})$ の時も $h(y) = \tilde{y}$ であるから $h(y) = \tilde{\psi}_i(b, \tilde{y})$ であるから $\tilde{g}\tilde{y} = \tilde{g}(\tilde{\psi}_i(b, \tilde{y}))$ より

$$\tilde{g} \tilde{\psi}_i(g, \tilde{y}) = \tilde{g} \tilde{\psi}_i(g, \psi_i(b, \tilde{y})) \quad . \quad \text{したがって}$$

$$\tilde{\psi}_{i-1}(g, h(x)) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g} \tilde{\psi}_i(g, \tilde{y}) \\ \text{or} \\ \tilde{g} \tilde{\psi}_i(g, \psi_i(b, \tilde{y})) \end{array} \right\} = \tilde{g} \tilde{\psi}_i(g, h(y))$$

$$= \tilde{g} h \psi_i(g, y) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{ より } h \psi_{i-1}(g, x) = \tilde{\psi}_{i-1}(g, h(x)) \quad .$$

$$h(S_k^*) = \tilde{S}_k^* \quad (1 \leq k \leq i-1) \text{ は前と同様に示される。}$$

$$\text{したがって } \psi_{i-1} \xrightarrow{b} \psi_i, \quad \tilde{\psi}_{i-1} \xrightarrow{b} \tilde{\psi}_i \quad \text{と Lemma 3.4}$$

により作られた (b による) reducing operation を表わし,

$\psi_{i-1}, \tilde{\psi}_{i-1} \in \mathcal{O}(G_{i-1})$ とするとき ψ_i と $\tilde{\psi}_i$ が s -congruent ならば ψ_{i-1} と $\tilde{\psi}_{i-1}$ も s -congruent であることが分かる。

そこで, 二つの finite Abelian action $\psi, \tilde{\psi} \in \mathcal{O}(G)$ が与えられた時, $B(\psi) = B(\tilde{\psi})$ と仮定し $B(\psi) = B(\tilde{\psi}) = \{b_1, b_2, \dots, b_g\}$ とおく。そして reducing operation を b_1, b_2, \dots, b_g の順に $\psi, \tilde{\psi}$ に対しておこなうとする。

$$\begin{array}{ccccccc} \psi & \xrightarrow{b_1} & \psi_1 & \xrightarrow{b_2} & \psi_2 & \xrightarrow{b_3} & \dots\dots \xrightarrow{b_g} \psi_g(G_g, M_g, S_g^{\oplus}) \\ \tilde{\psi} & \xrightarrow{b_1} & \tilde{\psi}_1 & \xrightarrow{b_2} & \tilde{\psi}_2 & \xrightarrow{b_3} & \dots\dots \xrightarrow{b_g} \tilde{\psi}_g(\tilde{G}_g, \tilde{M}_g, \tilde{S}_g^{\oplus}) \end{array}$$

この時

定理 4.1

もしも $\psi(G, M)$ と $\tilde{\psi}(G, \tilde{M})$ が congruent (equivalent) ならば $\psi_g(G_g, M_g, S_g^{\oplus})$ と $\tilde{\psi}_g(\tilde{G}_g, \tilde{M}_g, \tilde{S}_g^{\oplus})$ も s -congruent (s -

equivalent) である。(この時は自動的に $B(\psi) = B(\tilde{\psi})$)

[証明] ψ と $\tilde{\psi}$ が congruent より Lemma 4.1 より ψ_i と $\tilde{\psi}_i$ が s -congruent, これらよりかえせば $\psi_g(G_g, M_g, S_g^{\otimes})$ と $\tilde{\psi}_g(G_g, M_g, S_g^{\otimes})$ も s -congruent.

定理 4.2

上のようにして作られた $\psi_g(G_g, M_g, S_g^{\otimes})$ と $\tilde{\psi}_g(\tilde{G}_g, \tilde{M}_g, \tilde{S}_g^{\otimes})$ が s -congruent (s -equivalent) ならば $\psi(G, M)$ と $\tilde{\psi}(G, \tilde{M})$ も congruent (equivalent) である。

<注> ここでは, 上の各 b_i について $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes})$ と $\tilde{\psi}_{i-1}(\tilde{G}_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}, \tilde{S}_{i-1}^{\otimes})$ において $M_{i-1} - S'_{b_i}(\psi_{i-1})$ と $\tilde{M}_{i-1} - S'_{b_i}(\tilde{\psi}_{i-1})$ が連結であるかどうかを "同じ" であるという仮定が必要である。しかし [8] において示される結果を使えば $B(\psi) = B(\tilde{\psi})$ で $G_g = \tilde{G}_g$ ならばこの仮定は必要ないことが示される。

[証明] Lemma 4.2 より明らか

[Remark] $\psi_g, \tilde{\psi}_g$ はともに $S^{\perp}(\psi_g) = \phi = S^{\perp}(\tilde{\psi}_g)$ である。さらに $\mathcal{O}(G)/\sim$ から $\mathcal{O}(G_g)/\sim_s$ は単射であることが定理 4.1, 定理 4.2 よりわかる。

次の節で全射であることを示す。

§ 5. reducing operation の逆操作

finite Abelian action $\psi \in \mathcal{O}(G)$ より 何回かの reducing operation をしてえられた finite Abelian s -action を ψ_{i-1} ($G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes}$) とする。

さて G_{i-1} の $b = b_i \in B \cap G_{i-1}$ と finite Abelian s -action $\psi_i \in \mathcal{O}_s(G_i, M_i, S_i^{\otimes})$ が与えられたとする。このとき、次の二つ [A], [B] の場合を考える

[A] G_i が G_{i-1} の index 2 の部分群 であり $b_i \notin G_i$ のときは次のようにして ψ_i から $\mathcal{O}_s(G_{i-1})$ の元を作る。

M_i の copy M_i' をとり z を M_i から M_i' の上への同相写像、 $j = z|_{S_i^{**}}$ とし $M_{i-1} = M_i \cup_j M_i'$ とすれば M_{i-1} は 2次元多様体で $\psi_{i-1} : G_{i-1} \times M_{i-1} \longrightarrow M_{i-1}$ を次のように定める。(但し $S_i^{\otimes} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \dots, S_i^{**})$)

$$\psi_{i-1}(g, x) = \begin{cases} \psi_i(g, x) & (g \in G_i, x \in M_i) \\ z \psi_i(g, z^{-1}(x)) & (g \in G_i, x \in M_i') \\ z \psi_i(bg, x) & (g \in G_{i-1} - G_i, x \in M_i) \\ \psi_i(bg, z^{-1}(x)) & (g \in G_{i-1} - G_i, x \in M_i') \end{cases}$$

すると ψ_{i-1} は well-defined である。

Lemma 5.1 ψ_{i-1} は次の性質をみたすの finite Abelian s -action になる。

$$\textcircled{1} S_b^1(\psi_{i-1}) = S_i^{**}$$

$$S_h^1(\psi_{i-1}^-) = S_h^1(\psi_i) \cup_j z(S_h^1(\psi_i)) \quad (h \in G_i \quad h \neq b)$$

$$S_h^1(\psi_{i-1}^-) = \emptyset \quad (h \notin G_i \quad h \neq b)$$

$$\textcircled{2} \quad S_H^0(\psi_{i-1}^-) = S_H^0(\psi_i) \cup_j z(S_H^0(\psi_i)) \quad (H \subset G_i)$$

$$S_H^0(\psi_{i-1}^-) = \emptyset \quad (H \not\subset G_i)$$

$$\textcircled{3} \quad S_k^{*-} = S_k^{**} \cup_j z(S_k^{**}) \quad \text{とおくと} \quad (1 \leq k \leq i-1) \quad S_k^{*-}$$

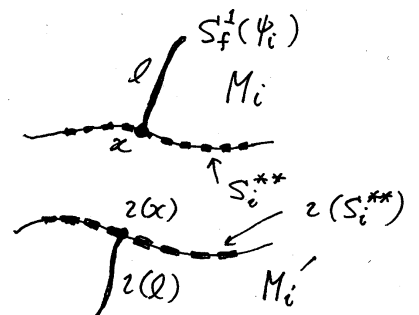
は M_{i-1} 上の arc と loop からなり $\psi_{i-1}^-(g, S_k^{*-}) = S_k^{*-} \quad (g \in G_{i-1})$

$$\textcircled{4} \quad M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1}^-) \text{ は連結である。}$$

$$\text{そこで} \quad S_{i-1}^{\otimes -} = (S_1^{*-}, S_2^{*-}, \dots, S_{i-1}^{*-}) \quad \text{とおくと} \quad \psi_{i-1}^- \in \mathcal{O}_S(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes -}) \quad \text{となる。}$$

[証明] finite Abelian action になることは定義にしたがって確かめればよい。次に $x \in S_b^1(\psi_{i-1}^-)$ のとき もし $x \notin M_i$ とすれば $x = \psi_{i-1}^-(b, x) = \psi_i(bb, z^{-1}(x)) \uparrow = \psi_i(e, z^{-1}(x)) = z^{-1}(x) \in M_i$ (矛盾) $\langle b \text{ は order } 2 \text{ である} \rangle$ $x \notin M_i'$ のときも同様。故に $x \in M_i \cap M_i' = S_i^{**}$ 。また $h \in G_i \quad (h \neq b)$ のとき \subset は定義により確かめればよい。また逆も $x \notin S_i^{**}$ の時は明らか。 $x \in S_i^{**}$ の時は、 $S^1(\psi_i)$ の性質と $S_i^{**} \subset M_i$ より \square をみれば明らかに $x \in S_h^1(\psi_{i-1}^-)$ となる。

さて $h \notin G_i \quad h \neq b$ のときは もし $\exists x \in S_h^1(\psi_{i-1}^-)$ として $h = bh'$ st $h' \in G_i$

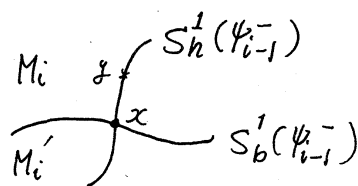


とすれば $x \in S_i^{**} = S_b^1(\psi_{i-1})$ となるが

$S^1(\psi_{i-1})$ の性質より右図のようになるが

図のような点 $y \in M_i$ は $\psi_{i-1}(h, y) \in M_i'$ と

なり矛盾 ($\psi_{i-1}(h, y) = y$)。よって $S_h^1(\psi_{i-1}) = \emptyset$



③ ④ は定義に従って確かめればよい。

Cor. もしも ψ_i が ψ_{i-1} より b による reducing operation
でえられた (さらに $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ が連結でない) ものとする

と、上の Lemma で作られた $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\oplus})$ と $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\oplus})$ は s -congruent (s -equivalent) である

また上の Lemma で作られた ψ_{i-1} に b による reducing
operation とほどこしてえられた (Lemma 3.3 にあて作られる)

$\psi_i^+(G_i^+, M_i^+, S_i^{\oplus+})$ は $\psi_i(G_i, M_i, S_i^{\oplus})$ と s -congruent
(s -equivalent) である。したがってこの場合 $\mathcal{O}_s(G_{i-1})$ の

s -congruence class と $\mathcal{O}_s(G_i)$ の s -congruence class は 1
対 1 の対応 (全単射) をする。

[B] $G_i = G_{i-1}$ の時は次のように ψ_i が $\mathcal{O}_s(G_{i-1})$ の元
 ψ_{i-1} を作る。

M_i の 2 元 x, y に対して $x \sim y$ とは

(i) $x, y \in S_i^{**}$ のときは $x = y$ or $\psi_i(b, x) = y$

(ii) その他のときは $x = y$

のときと定め M_i に equivalence relation \sim を定め,
 $M_{i-1} = M_i / \sim$, $f^- : M_i \longrightarrow M_{i-1}$ (natural projection)
 とおき $(S_i^{\otimes} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \dots, S_i^{**}))$, $\psi_{i-1}^- : G_{i-1}$
 $\times M_{i-1} \longrightarrow M_{i-1}$ と $g \in G_{i-1}$ $x \in M_{i-1}$ に対して
 $\exists y \in M_i$ s.t. $f^-(y) = x$ とし $\psi_{i-1}^-(g, x) = f^-(\psi_i(g, y))$
 と定めると ψ_{i-1}^- は well-defined (y のとりかたによらない)
 として $S_b^{*-} = f^-(S_b^{**})$ ($1 \leq b \leq i-1$) とおくと

Lemma 5.2 次の性質を ψ_{i-1}^- はみえすので finite Abelian
 s-action になる。

- ① $S_b^1(\psi_{i-1}^-) = f^-(S_i^{**})$
 $S_h^1(\psi_{i-1}^-) = f^-(S_h^1(\psi_i))$ ($h \neq b$)
- ② $S_H^0(\psi_{i-1}^-) = f^-(S_H^0(\psi_i))$ $H \subset G_{i-1} = G_i$
- ③ $\psi_{i-1}^-(g, S_b^{*-}) = S_b^{*-}$ ($1 \leq b \leq i-1$)
- ④ $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1}^-)$ は連結。

そこで $S_{i-1}^{\otimes-} = (S_1^{*-}, S_2^{*-}, \dots, S_{i-1}^{*-})$ とおくと ψ_{i-1}^-
 $\in \mathcal{O}_S(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\otimes-})$ となる。

[証明] $S_b^1(\psi_{i-1}^-) \supset f^-(S_i^{**})$ は定義より明らか。逆
 に $\exists x \in S_b^1(\psi_{i-1}^-)$ s.t. $x \notin f^-(S_i^{**})$ とすると $\exists! y \in M_i$ s.t.
 $f^-(y) = x$ だが この y は $y \in S_b(\psi_i)$ になるが $S_b^1(\psi_i) = \emptyset$
 だから $y \in S_b^0(\psi_i)$ であるから $x \in S_b^1(\psi_{i-1}^-)$ だが f^- で y の近
 傍とせば x の近傍となるが矛盾 ($x \in S_b^1(\psi_{i-1}^-)$) \square

> 参照 > また $f(S_h^1(\psi_i)) \subset S_h^1(\psi_{i-1})$

は定義より示せ、逆も上と同じ方法

により示される。すなわち $\exists x \in S_b^1(\psi_{i-1})$

s.t. $x \notin f(S_h^1(\psi_i))$ とするとき

$\exists y \in M_i$ s.t. $f(y) = x$ とすれば

$y \in S_h^1(\psi_i)$ より $\psi_i(h, y) = y$ — ① または $\psi_i(h, y)$

$= \psi_i(b, y)$ (i.e. $y, \psi_i(h, y) \in S_i^{**}$) — ② とするが ①

の時は上と同じ、②のときは $h = b$ とする。

③ ④ は定義に従って確かめれば示せる。

Cor. もしも ψ_i が ψ_{i-1} より b による reducing operation
でえられた (さらに $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ が連結) ものとする、
上の Lemma で作られた $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\oplus-})$ と $\psi_{i-1}(G_{i-1},$
 $M_{i-1}, S_{i-1}^{\oplus-})$ は s -congruent (s -equivalent) である。

また上の Lemma で作られた ψ_{i-1} に b による reducing
operation を施して (Lemma 3.4 により作られた) $\psi_i^+($
 $G_i^+, M_i^+, S_i^{\oplus+})$ は $\psi_i(G_i, M_i, S_i^{\oplus+})$ と s -congruent (s -
equivalent) である。したがってこの場合 $\mathcal{R}_s(G_{i-1})$ の
 s -congruence class と $\mathcal{R}_s(G_i)$ の s -congruence class
は 1 対 1 の対応 (全単射) をする。



$\downarrow f$



これらの結果をまとめると, B の任意の部分群 B' に対して $G(B') = G/B'$ と表わすとき, 任意の finite Abelian action $\psi \in \mathcal{O}(G)$ から何回かの reducing operation を行なうと 1 次元 singular set のないう finite Abelian s-action $\psi_g \in \mathcal{O}_s(G_g)$ がえられたとき $\exists B' \subset B$ s.t. $G(B') = G_g$ である。また逆に ある $B' \subset B$ に対して $G_r = G'(B')$ とおき ψ_r を任意の 1 次元 singular set のないう finite Abelian s-action と $\psi_r \in \mathcal{O}_s(G_r)$ となすば $\exists \psi \in \mathcal{O}(G)$; finite Abelian action st. ψ_r は ψ より r 回の reducing operation によって得られる。(s-congruence class の意味で) (したがって §4 の結果と合わせて,

定理 $\mathcal{O}_s^{\oplus}(G) = \bigcup \{ \mathcal{O}_s^1(G/B') ; B' \text{ は } B \text{ の部分群} \}$ と表わすとき $\mathcal{O}(G)$ の congruence class と $\mathcal{O}_s^1(G)$ の s-congruence class は 1 対 1 の対応をなす。(但し $\mathcal{O}_s^1(G/B')$ は 1 次元 singular set のないう finite Abelian s-action $\psi^+ \in \mathcal{O}_s(G/B')$ の集合) すなわち $\mathcal{O}(G)$ の congruent (equivalent) による分類は 1 次元 singular set のないう $\mathcal{O}_s(G(B'))$ の分類に帰着される。

R E F E R E N C E S

- [1] A. L. Edmonds, Surface symmetry I , Michigan Math. J., 29 (1982) 171-183
- [2] P. A. Smith, Abelian actions on 2-manifolds , Michigan Math. J., 14 (1967) 257-275
- [3] G. T. Whyburn, ANALYTIC TOPOLOGY , Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 28. Amer. Math.Soc., 1942
- [4] K. Yokoyama, Classification of periodic maps on compact surfaces: I , Tokyo J. Math., 6 (1983) 75-94
- [5] K. Yokoyama, Classification of periodic maps on compact surfaces: II , Tokyo J. Math., 7 (1984) 249-285
- [6] K. Yokoyama, Note on periodic maps on compact surfaces , preprint
- [7] K. Yokoyama, Complete classification of periodic maps on compact surfaces, preprint
- [8] K. Yokoyama, Note on finite Abelian actions on compact 2-manifolds, preparation
- [9] K. Yokoyama, A classification of periodic maps on 2-manifolds , 京都大学数理解析研 講究録 369 「3次元多様体の構造と位置の問題」 8 - 30 (1979年11月)
- [10] K. Yokoyama, Periodic maps on compact surfaces II , 京都大学数理解析研 講究録 487 「3.4次元多様体における位置と構造」 84 - 111 (1983年5月)